Modelo de Crecimiento de Largo Plazo (LTGM v4.1) - Descripción del Modelo*

Steven Pennings (spennings@worldbank.org)

27 de junio del 2018

- **NUEVO** en el LTGM v4: el efecto del crecimiento económico sobre la pobreza (a través de una distribución log-normal de la distribución de ingreso, Sección 5)
- El modelo neoclásico de crecimiento está basado en Solow (1956), Swan (1956) y Hevia y Loayza (2012).
  - Hay dos partes claves: la función de producción y la acumulación del capital.
- Modelo 1: asuma una senda para la tasa de inversión sobre PBI (I/Y) $\rightarrow$tasa de crecimiento implícita del PBI per cápita.
- Modelo 2: asuma una senda de crecimiento de PBI per cápita $\rightarrow$tasa implícita de inversión sobre PBI (I/Y).
- Modelo 3: asuma una senda para la tasa de ahorro sobre PBI (S/Y) $\rightarrow$ tasa de crecimiento implícita del PBI per cápita.
- Una restricción de balanza de cuenta corriente o de deuda externa convierte los ahorros (S/Y) en la tasa de inversión sobre PBI(I/Y) en el Modelo 3. La restricción también permite que el ahorro sea calculado como un residuo en el Modelo 1 y 2 (vea la Sección 3 para mayor detalle).
- La sección **4** resume los motores de crecimiento del PBI per cápita en una ecuación (y lo compara con el ICOR).

1 Modelo 1: Crecimiento económico dado un perfil de inversión

1.1 La función de producción

Asuma una función de producción estándar donde Y_t es PBI, A_t es la productividad total de los factores, K_t es el stock de capital y h_tL_t es la tasa de trabajo efectivo en producción, que puede ser desagregada en h_t capital humano ***por trabajador*** y L_t es el número de trabajadores. β es la tasa de participación laboral en el ingreso.

$$Y_t = A_t K_t^{1-\beta}(h_t L_t)^{\beta} \tag{1}$$

N_t es el número de la población total y es el número de trabajadores desagregado en $L_t = \varrho_t \omega_t N_t$ donde ϱ_t es la tasa de participación laboral y ω_t es la tasa de la población en edad de trabajar.[1]

Podemos dividir por N_t o L_t para obtener todas las variables en términos per cápita o por trabajdor. En términos de notación, por defecto está en términos *de trabajador*, pero agregamos "PC" para denotar per cápita (e.j. y_t es producto por trabajador e y_t^{pc} es producto per cápita). k_t es capital por trabajdor. h_t ya está en términos de trabajador.

$$y_t^{pc} \equiv \frac{Y_t}{N_t} = \frac{Y_t}{L_t}\varrho_t\omega_t = y_t\varrho_t\omega_t$$

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = A_t k_t^{1-\beta} h_t^{\beta}$$

*Traducido por Jorge Luis Guzmán Correa (DECMG)

[1] Asumimos que no hay desempleo o subempleo. Entonces, todos en la fuerza laboral trabajan. En una versión anterior a esta nota (con notación diferente), asumí t $\varrho_t = \omega_t = 1$ para que la tasa de población y de fuerza laboral sean las mismas.

$$y_t^{pc} = \varrho_t \omega_t y_t = A_t \varrho_t \omega_t k_t^{1-\beta} h_t^{\beta}$$

De esta ecuación podemos calcular la tasa de crecimiento desde t hasta t+1:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{A_{t+1} k_{t+1}^{1-\beta} h_{t+1}^{\beta}}{A_t k_t^{1-\beta} h_t^{\beta}} = \frac{A_{t+1}}{A_t} \left[\frac{k_{t+1}}{k_t}\right]^{1-\beta} \left[\frac{h_{t+1}}{h_t}\right]^{\beta}$$

Reescriba esta ecuación en términos de $g_{y,t+1}$, la tasa de crecimiento de PBI *por trabajador* desde t hasta t+1 (ej. 0.05).

$$1 + g_{y,t+1} = (1 + g_{A,t+1}) \left[1 + g_{k,t+1}\right]^{1-\beta} \left[1 + g_{h,t+1}\right]^{\beta} \tag{2}$$

En la ecuación 2, el crecimiento del producto es causado por el crecimiento en la productividad ($g_{A,t+1}$ la tasa de crecimiento de la PTF), aumento en la intensidad del capital ($g_{k,t+1}$ es la tasa de crecimiento del capital *por trabajador*) y $g_{h,t+1}$ es la tasa de crecimiento del capital humano *por trabajador*.

$$\frac{y_{t+1}^{pc}}{y_t^{pc}} = \left[\frac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}\right] \left[\frac{\omega_{t+1}}{\omega_t}\right] \left[\frac{y_{t+1}}{y_t}\right]$$

El crecimiento del producto *per cápita* es sólo producto *por trabajador* ajustados por cambios en la participación en la tasa de población en edad de trabajar. De forma específica, para una tasa dada del crecimiento del producto por trabajador, el crecimiento puede estar inducido por una *transición demográfica* (crecimiento en la tasa de la población en edad de trabajar $g_{\omega,t+1}$), o *un incremento en la participación de la fuerza laboral* (crecimiento en la tasa de participación laboral $g_{\varrho,t+1}$).

$$1 + g_{y,t+1}^{pc} = \left[1 + g_{\omega,t+1}\right] \left[1 + g_{\varrho,t+1}\right] \left[1 + g_{y,t+1}\right] \tag{3}$$

1.2 Acumulación del capital físico

La ecuación 4 es acumulación de capital, donde I_t es inversión.

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \tag{4}$$

Antes proseguir, necesitamos reescribir la tasa de crecimiento de la fuerza laboral en términos de tasas de crecimiento. Sustituímos $L_t = \varrho_t \omega_t N_t$ y obtenemos la siguiente ecuación, donde $g_{N,t+1}$ es el crecimiento poblacional entre t y t+1.

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{\varrho_{t+1} \omega_{t+1} N_{t+1}}{\varrho_t \omega_t N_t} = \left\{1 + g_{\varrho,t+1}\right\} \left\{1 + g_{\omega,t+1}\right\} (1 + g_{N,t+1})$$

El siguiente paso es escribir la acumulación de capital en términos *por trabajador*. Empiece con la ecuación 4 y divida todo por L_t.

$$\left[\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\right] \left[\frac{L_{t+1}}{L_t}\right] = (1 - \delta) \frac{K_t}{L_t} + \frac{I_t}{L_t}$$

Ahora escriba en términos de tasas de crecimiento y en términos *por trabajador*.

$$k_{t+1} \left\{1 + g_{\varrho,t+1}\right\} \left\{1 + g_{\omega,t+1}\right\} (1 + g_{N,t+1}) = (1 - \delta) k_t + i_t$$

Podemos dividir todo por k_t

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} (1 + g_{N,t+1}) \left\{1 + g_{\varrho,t+1}\right\} \left\{1 + g_{\omega,t+1}\right\} = (1 - \delta) + \frac{i_t}{k_t}$$

Luego, divida y multiplique por y_t (producto por trabajador). Donde $\frac{I_t}{Y_t}$ es la tasa de inversión sobre PBI y $\frac{K_t}{Y_t}$ es al ratio de capital sobre producto.

$$(1 + g_{k,t+1})(1 + g_{N,t+1}) \left\{1 + g_{\varrho,t+1}\right\} \left\{1 + g_{\omega,t+1}\right\} = (1 - \delta) + \frac{i_t}{y_t} \frac{y_t}{k_t}$$

Reorganice la ecuación para obtener la tasa de crecimiento del capital *por trabajador*.[2]

$$(1+g_{k,t+1}) = \frac{(1-\delta)+\dfrac{I_t}{Y_t}/\dfrac{K_t}{Y_t}}{(1+g_{N,t+1})(1+g_{\varrho,t+1})(1+g_{\omega,t+1})} \tag{5}$$

La Ecuación 5 determina el incremento de capital (en términos de trabajador).

Para resolver el modelo necesitamos K_t/Y_t. Tomamos el valor inicial K_0/Y_0 de las bases de datos del MFMod , PWT 8.1 y 9. Para los periodos posteriores, necesitamos actualizar el ratio de capital al producto en los siguientes periodos usando la Ecuación 6 y los valores para $g_{k,t+1}$ y $g_{y,t+1}$ los hemos calculado en la Ecuación 5 y 2.

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{k_{t+1}}{y_{t+1}} = \frac{k_{t+1}}{k_t}\frac{y_t}{y_{t+1}}\frac{k_t}{y_t}$$

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{(1+g_{k,t+1})}{(1+g_{y,t+1})}\frac{K_t}{Y_t} \tag{6}$$

1.3 Pasos para resolver el modelo

Para resolver el modelo, primero necesitamos hacer supuestos sobre algunas variables exógenas:

- Parámetros para β (la tasa de participación laboral en el ingreso), δ (la tasa de depreciación del capital) y $\frac{K_0}{Y_0}$ (ratio inicial de capital sobre el producto)
- Supuestos de sendas para $\left\{g_{A,t}, g_{h,t}, g_{\omega,t}, g_{\varrho,t}, g_{N,t}, \frac{I_t}{Y_t}\right\}_{t=1}^{T}$

Luego, calculamos la tasa de crecimiento del PBI per capita usando los siguientes pasos.

1. Calcule la tasa de crecimiento del capital por trabajador usando la Ecuación 5 (usando variables exógenas y predeterminadas)
2. Calcule la tasa de crecimiento del producto *por trabajador* usando la Ecuación 2 (usando $g_{k,t+1}$del; paso 1)
3. Calcule la tasa de crecimiento del producto per cápita usando la Ecuación 3 (usando $g_{y,t+1}$del paso 2)
4. Actualice el ratio del capital sobre el producto del siguiente periodo usando la Ecuación 6 (usando $g_{k,t+1}$y $g_{y,t+1}$de los pasos 1 y 2)

1.4 Parámetros y valores iniciales

- Los usuarios pueden escoger los parámetros y los valores iniciales de una gama de bases de datos y periodos de tiempo usando los menús en la hoja de Excel del LTGM o, simplemente, tipeando sus propios valores.
  - Los paramétros que no están disponibles en las bases de datos originales son interpolados usando promedios del grupo de ingreso al cual pertenence. Además, se indica en el modelo con una alerta que es un valor interpolado.
- β (la tasa laboral de participación en el ingreso) es obtenida de las PWT 8.1, 9 ya la base de datos de GTAP. 0.4-0.7 son números razonables.
- δ (la tasa de depreciación del capital) y $\frac{K_0}{Y_0}$ (la tasa inicial del ratio del capital sobre el producto) son obtenidas de las PWT 8.1 o PWT 9.[3]
- $\frac{I_t}{Y_t}$ es la tasa de inversión sobre PBI. El usuario tendrá que hacer supuestos sobre la senda del futuro de $\frac{I_t}{Y_t}$.[4]

[2]Note que $\frac{I_t}{Y_t} = \frac{i_t}{y_t}$ y $\frac{K_t}{Y_t} = \frac{k_t}{y_t}$ porque la L_t en el numerador y denominador se cancelan.

[3]El ratio de K_0/Y_0 es calculado usando rkna/ rgdpna en las PWT 8.1 y 9 (precios de cuentas nacionales).

[4]Los promedios históricos son obtenidos de la Inversión Doméstica Fija como porcentaje del PBI real del MFMod (NEGDIFTOTKD /NYGDPMKTPKD).

- $g_{A,t+1}$ es la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores exógena, y cifras razonables son 0% (pesimista), 1% (moderado) o 2% (optimista). Un crecimiento de la productividad más acelerado puede ser obtenido (por ejemplo) por medio de nuevas tecnologías, mayor competencia, menor regulación o factores que van desde menos eficientes a sectores más eficientes. Los promedios históricos son calculados de la PWT 8.1 y 9 (o usando la metodología de la PWT 8.1 con tasas de participación laboral en el ingreso de GTAP).
- $g_{\varrho,t+1}$ es la tasa de crecimiento de la participación laboral. Los datos históricos son obtenidos de la OIT o autoridades de los países. En la práctica, el determinante más importante de $g_{\varrho,t+1}$ es la participación de la fuerza laboral feminina.
- $g_{N,t+1}$ es el crecimiento poblacional exógeno y $g_{\omega,t+1}$ es el crecimiento de la tasa de la población en edad de trabajar. Ambas fueron obtenidas de las proyecciones y estimados de la World Bank Health Nutrition and Population Statistics: población (link), con $g_{\omega,t+1}$ determinado por la estructura de edad de la población.
- $g_{h,t+1}$ es el crecimiento del capital humano por trabajador exógeno otebnidos de la PWT 8.1 o 9. Un crecimiento del capital humano mayor, por ejemplo, más años de educación o una educación de mayor calidad, incrementará la tasa de crecimiento.[5]

[5] Hevia y Loayza (2012) se refieren a esto como $h_t = e^{\phi(E_t)}$, lo cual es la eficiencia de los trabajadores con E_t años promedio de educación. Si $E_t = 0$, $h_t = 1$, entonces h_t representa la eficiencia de un trabajador con E_t años de educación relativa a uno sin años de educación. Por ejemplo. si $h_t = 2$, para el promedio de años de educación de un país es dos veces más productivo que alguien sin educación. $\phi(E)$ es el aspecto más importante en el retorno de un año extra de educación y en PWT es similar, donde el retorno marginal a la educación es 13.4% para los primeros 4 años, 10.1% para los siguientes 4-8 años y 6.8% para mayor cantidad de años de educación, los datos vienen de la versión de Barro y Lee 1.3 (Inklaar and Timmer 2013, see Equation 15 and 16).

2 Modelo 2: Cálculo de la Tasa de Inversión sobre PBI para lograr una meta de crecimiento de PBI per cápita

Es relativamente sencillo reorganizar las ecuaciones descritas arriba para calcular la tasa de inversión necesaria para generar la tasa de crecimiento de PBI per cápita requerida (los usuarios pueden seleccionar una meta de reducción de la pobreza, vea la sección 5).

Primero, calcule la tasa de crecimiento del producto *por trabajador* consistente con la meta de crecimiento del producto per cápita usando la Ecuación 3.

$$1 + g_{y,t+1} = \frac{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}}{[1 + g_{\omega,t+1}]\,[1 + g_{\varrho,t+1}]}$$

Luego, sustituya esto en la Ecuación 2

$$(1 + g_{A,t+1})\,[1 + g_{k,t+1}]^{1-\beta}\,[1 + g_{h,t+1}]^{\beta} = \frac{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}}{[1 + g_{\omega,t+1}]\,[1 + g_{\varrho,t+1}]}$$

Después, sustituya la Ecuación 5 en la Ecuación 2 para eliminar la tasa de crecimiento del capital.

$$(1 + g_{A,t+1})\,[1 + g_{h,t+1}]^{\beta}\left[\frac{(1-\delta) + \frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t}}{(1 + g_{N,t+1})(1 + g_{\varrho,t+1})(1 + g_{\omega,t+1})}\right]^{1-\beta} = \frac{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}}{[1 + g_{\omega,t+1}]\,[1 + g_{\varrho,t+1}]}$$

Luego, haga un poco de álgebra para despejar I/Y en el lado izquierdo.

$$\left[(1-\delta) + \frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t}\right]^{1-\beta} = \frac{\left\{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}\right\}(1 + g_{N,t+1})^{1-\beta}(1 + g_{\varrho,t+1})^{1-\beta}(1 + g_{\omega,t+1})^{1-\beta}}{(1 + g_{A,t+1})\,[1 + g_{h,t+1}]^{\beta}\,[1 + g_{\omega,t+1}]\,[1 + g_{\varrho,t+1}]}$$

$$\left[(1-\delta) + \frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t}\right]^{1-\beta} = \frac{\left\{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}\right\}(1 + g_{N,t+1})^{1-\beta}}{(1 + g_{A,t+1})\,[1 + g_{h,t+1}]^{\beta}\,[1 + g_{\omega,t+1}]^{\beta}\,[1 + g_{\varrho,t+1}]^{\beta}}$$

$$\frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\left\{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}\right\}^{\frac{1}{1-\beta}}(1 + g_{N,t+1})}{(1 + g_{A,t+1})^{\frac{1}{1-\beta}}\,[1 + g_{h,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,[1 + g_{\omega,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,[1 + g_{\varrho,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}} - (1-\delta)$$

$$\frac{I_t}{Y_t} = \frac{K_t}{Y_t}\left[\frac{\left\{1 + \bar{g}^{pc}_{y,t+1}\right\}^{\frac{1}{1-\beta}}(1 + g_{N,t+1})}{(1 + g_{A,t+1})^{\frac{1}{1-\beta}}\,[1 + g_{h,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,[1 + g_{\omega,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\,[1 + g_{\varrho,t+1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}} - (1-\delta)\right] \tag{7}$$

Dada una $\{\bar{g}^{pc}_{y,t}\}^{T}_{t=1}$ uno puede calcular la inversión requerida usando la Ecuación 7. Al igual que antes, los valores futuros de $\frac{K_t}{Y_t}$ pueden ser actualizados para los periodo t+1, t+2.. usando la Ecuación 6, con la tasa de crecimiento del capital calculada de la Ecuación 5.

La Ecuación 7 establece que la inversión requerida está incrementando en la meta de crecimiento de PBI per cápita $\bar{g}^{pc}_{y,t+1}$, la tasa de depreciación δ, la tasa de crecimiento poblacional $g_{N,t+1}$ y también el ratio de capital sobre el producto K_t/Y_t. El crecimiento de la productividad ($g_{A,t+1}$), del capital humano ($g_{h,t+1}$), la tasa de la población en edad de trabajar ($g_{\omega,t+1}$) y la tasa de participación laboral ($g_{\varrho,t+1}$) reducen la tasa de inversión requerida.

3 La restricción de la balanza externa y el modelo 3 (crecimiento dado un perfil de ahorro)

Los ahorros son convertidos en inversión (y vice versa) usando una restricción de la balanza externa que puede ser en la forma de una senda para (i) CAB_t/Y_t o (ii) la deuda externa como porcentaje de PBI D_t/Y_t (y la inversión extranjera directa FDI_t/Y_t).[6]

Una Restricción de Balanza de Cuenta Corriente

El modelo es simple asumiendo una senda de CAB_t/Y_t.[7]

$$\frac{I_t}{Y_t} = \frac{S_t}{Y_t} - \frac{CAB_t}{Y_t} \tag{8}$$

- **Modelo 3 (restricción de CAB/Y):** Dado un supuesto de ahorros nacionales como porcentaje de PBI (S_t/Y_t), simplemente combínelo con la restricción de CAB_t/Y_t y use la Ecuación 8 para calcular I_t/Y_t Luego, use los pasos del 1 al 4 del Modelo 1 (sección 1.3) para calcular el crecimiento.
- **Modelo 1 y 2 (restricción de CAB/Y):** Reorganice 8 y combine la restricción de CAB_t/Y_t con la senda de I_t/Y_t asumida (en el Modelo 1) o implícita (en el Modelo 2) para generar una tasa de ahorro implícita: $S_t/Y_t = I_t/Y_t - CAB_t/Y_t$.

Una Restricción de Deuda Externa

De forma alternativa, uno puede asumir una restricción de deuda externa, combinada con una senda de inversión extranjera directa (FDI_t). De una versión simplificada de la identidad de la balanza de pagos, la CAB_t es igual a la adquisición de activos externos netos (NFA_t) sustrayendo la incurrencia de los pasivos netos externos (NFL_t). Los activos y los pasivos son medidos al final del periodo.

$$CAB_t = \Delta NFA_t - \Delta NFL_t \tag{9}$$

El cambio en pasivos netos externos puede ser desagregado en influjos netos de inversión extranjera directa (FDI), así como la acumulación de la deuda externa total D_t (pasivos de portafolio, públicos y privados). Para mayor simplicidad, asuma que no hay cambios en el stock de activos netos externos, lo cual es un supuesto optimista para muchos países en vías de desarrollo.

$$\Delta NFL_t = FDI_t + (D_t - D_{t-1}) \qquad \Delta NFA_t \approx 0$$

Si sustituimos en la Ecuación 9, y dividimos por PBI (Y_t) y usando $Y_t/Y_{t-1} = (1 + g^{pc}_{y,t})(1 + g_{N,t})$, uno puede escribir CAB_t/Y_t como:

$$\frac{CAB_t}{Y_t} = -\left[\frac{D_t}{Y_t} - \frac{D_{t-1}/Y_{t-1}}{(1 + g^{pc}_{y,t})(1 + g_{N,t})}\right] - \frac{FDI_t}{Y_t} \tag{10}$$

Si combinamos las Ecuaciones 8 y 10, uno puede relacionar los ahorros e ingresos con la restricción de la deuda externa.

$$\frac{I_t}{Y_t} = \frac{S_t}{Y_t} + \frac{FDI_t}{Y_t} + \left[\frac{D_t}{Y_t} - \frac{D_{t-1}/Y_{t-1}}{(1 + g^{pc}_{y,t})(1 + g_{N,t})}\right] \tag{11}$$

Esto también puede ser reescrito en términos de ahorros requeridos.

$$\frac{S_t}{Y_t} = \left[\frac{I_t}{Y_t} - \frac{FDI_t}{Y_t}\right] - \left[\frac{D_t}{Y_t} - \frac{D_{t-1}/Y_{t-1}}{(1 + g^{pc}_{y,t})(1 + g_{N,t})}\right] \tag{12}$$

- **Modelo 3 (restricción de D/Y):** Asuma la senda para la deuda externa sobre PBI (D_t/Y_t), y los flujos netos de Inversión Extranjera Directa FDI_t/Y_t, y use la Ecuación 11 para calcular I_t/Y_t para un nivel dado de ahorros (S_t/Y_t). Luego, use los pasos del 1 al 4 del Modelo 1 (sección 1.3) para calcular el crecimiento.

[6] Los valores iniciales deCAB_t/Y_t son tomados de la base de datos del MFMod. Los World Development Indicators son la fuente de la FDI_t/Y_t (código: BX.KLT.DINV.WD.GD.ZS.) y D_t/Y_t (calculado como DT.DOD.DECT.CD ÷ NY.GDP.MKTP.CD).

[7] Para las economías que no están abiertas a los flujos de capitales, asuma $CAB_t/Y_t \approx 0$.

- **Modelo 1 y 2 (restricción de D/Y):** Combine las sendas de D_t/Y_t y de FDI_t/Y_t con la senda de I_t/Y_t asumida (Modelo 1) o implícita (Model 2) para generar la tasa de ahorros implícita usando la Ecuación 12.

El efecto de la FDI en los ahorros nacionales requeridos: Con una restricción de deuda externa, un incremento en la FDI_t/Y_t actúa como un sustituto de los ahorros nacionales (S_t/Y_t). Entonces, en la Ecuación 12, los ahorros nacionales sólo tienen que cubrir una fracción del ahorro no financiada por FDI $[I_t/Y_t - FDI_t/Y_t]$, en vez del monto total.

4 Entendiendo los motores de crecimiento

Para entender los motores de crecimiento, en esta sección tomamos una aproximación log-lineal para simplificar las fórmulas. Nótese que un análisis cuantitativo debería ser hecho usando las ecuaciones exactas de arriba porque hasta las aproximaciones pequeñas pueden llevar a errores si se acumulan en el tiempo. Primero, combine la Ecuación 2 y 3:

$$1 + g^{pc}_{y,t+1} = [1 + g_{\omega,t+1}]\,[1 + g_{\varrho,t+1}]\,(1 + g_{A,t+1})\,[1 + g_{k,t+1}]^{1-\beta}\,[1 + g_{h,t+1}]^{\beta}$$

Si tomamos los logaritmos y usamos la aproximación $ln(1 + x) \approx x$ (para una x pequeña) esto se convierte en:

$$g^{pc}_{y,t+1} \approx g_{A,t+1} + g_{\omega,t+1} + g_{\varrho,t+1} + (1-\beta)g_{k,t+1} + \beta g_{h,t+1} \tag{13}$$

Si tomamos los logaritmos del crecimiento del capital por trabajador en la Ecuación 5, da como resultado:

$$ln(1 + g_{k,t+1}) = ln\left[1 + \frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t} - \delta\right] - ln(1 + g_{N,t+1}) - ln(1 + g_{\varrho,t+1}) - ln(1 + g_{\omega,t+1})$$

Si aplicamos la aproximación $ln(1 + x) \approx x$ (para una x pequeña):

$$g_{k,t+1} \approx \frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t} - \delta - g_{N,t+1} - g_{\varrho,t+1} - g_{\omega,t+1} \tag{14}$$

Si combinamos las Ecuaciones 13 y 14 da los determinantes aproximados de crecimiento :

$$g^{pc}_{y,t+1} \approx g_{A,t+1} + \beta(g_{\omega,t+1} + g_{\varrho,t+1} + g_{h,t+1}) + (1-\beta)\left[\frac{I_t}{Y_t}/\frac{K_t}{Y_t} - \delta - g_{N,t+1}\right] \tag{15}$$

El efecto de la mayoría de factores (con excepción de la PTF) en el crecimiento depende de la tasa laboral de participación en el ingreso β, la cual está alrededor de 0.5 si promediamos todos los países (PWT 8.1).[8]

- El crecimiento de la PTF ($g_{A,t+1}$) tiene el efecto directo más grande sobre crecimiento: un incremento de 1ppt en el crecimiento de la PTF incrementa el crecimiento económico en 1ppt (sin importar laβ)

- Un incremento de 1ppt en el crecimiento del capital humano ($g_{h,t+1}$), tasa de participación de la fuerza laboral ($g_{\varrho,t+1}$) o en el crecimiento de la tasa de la población en edad de trabajar ($g_{\omega,t+1}$) incrementa el crecimineto del PBI per cápita por βppt. Si $\beta \approx 0.5$, entonces un incremento en un 1ppt en cada uno de estos factores, tiene *la mitad* del efecto de un incremento en 1ppt en el crecimiento de la PTF.

- El crecimiento poblacional ($g_{N,t+1}$) y la depreciación (δ) reducen el crecimiento del PBI per cápita en $1-\beta$, porque ellos reducen la acumulación de capital (capital por trabajador) al reducir el monto de capital (δ) o al incrementar el número de trabajadores ($g_{N,t+1}$).

- El efecto de un incremento en la tasa de inversión sobre PBI depende de la tasa de participación del capital ($1-\beta$), así como del ratio de capital sobre producto existente (K/Y). Si asumimos $1-\beta = 0.5$, un incremento grande de 10ppts en la tasa de inversión sobre el PBI (ej de 20% a 30%), incrementa el crecimiento en 2.5ppts por año si $K/Y = 2$ (ej. $0.1 \times 0.5/2$), pero sólo en 1.25ppt si $K/Y = 4$.

  - *Esto significa que una estrategia de un crecimiento económico inducido por la inversión se volverá menos efectiva en el corto plazo, a menos que sea acompañada por otras reformas para aumentar la productividad, el capital humano o participación para incrementar el incremento en K/Y.*

[8] En los ejercicios contabilidad de crecimiento estándar para países de la OECD como EEUU, la tasa de participación laboral en el ingreso es de $2/3$.

4.1 Relación con el Ratio de Capital sobre el Producto Incremental (ICOR)

Muchos países usan el ratio de capital sobre el producto incremental (ICOR) para analizar la efectividad de la inversión en incrementar el crecimiento. De forma específica, el ICOR marginal (bruto) es incremento de un punto porcentual en la inversión como porcentaje del PBI requerido para incrementar el crecimiento del PBI en 1%.[9]

$$g_Y \approx \frac{1}{ICOR}\frac{I}{Y} \tag{16}$$

donde $g_{Y,t+1} \equiv \dfrac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t} \approx g^{pc}_{y,t+1} + g_{N,t+1}$es la tasa de crecimiento del PBI (no per cápita). Como suponemos que la relación en la Ecuación 16 es proporcional ICOR ($ICOR_a$) promedio es igual al ICOR ($ICOR_m$) marginal y al famoso *ICOR*. Tomemos dos ejemplos : (a) si el ICOR *marginal* es 4.3, si el país quiere incrementar el crecimiento del PBI en 1%, debe incrementar la tasa de inversión sobre PBI en 4.3ppts; (b) si el ICOR *promedio* es 4.3, una meta de tasa de crecimiento del PBI de 8% puede ser lograda con una tasa de inversión de 34.4% del PBI ($I/Y = ICOR_g \times g_Y$ =4.3 × 8% = 34.4%, rearranging Equation 16).

En el modelo de crecimiento de largo plazo (LTGM), la relación aproximada entre el crecimiento del PBI y la I/Y es lineal, mas no proporcional, lo cual significa que el ICOR solo aplica para un análisis de unidades extra de crecimiento o de inversión.[10] Si reorganizamos la Ecuación 15:

$$g_{Y,t+t} \approx \underbrace{\beta g_{N,t+1} + g_{A,t+1} + \beta(g_{\omega,t+1} + g_{\varrho,t+1} + g_{h,t+1}) - (1-\beta)\delta}_{Intercepto\quad que\quad no\quad depende\quad de\quad I/Y} + \underbrace{\frac{1-\beta}{K_t/Y_t}}_{1/ICOR_m} \times \frac{I_t}{Y_t} \tag{17}$$

En el LTGM, para incrementar el crecimiento del PBI por 1%, uno debe incrementar la tasa de inversión sobre PBI por:

$$ICOR^{LTGM}_{m,t} = \frac{1}{1-\beta}\frac{K_t}{Y_t} \tag{18}$$

Por ejemplo, supongamos que $\beta = 0.5$, y $K_0/Y_0 = 2.2$ el ICOR *marginal* es 4.4, entonces se necesita incrementar la tasa de inversión sobre PBI en 4.4ppts para incrementar el crecimiento del PBI en 1%.

Un aspecto importante a resaltar, es que el ICOR marginal *no* es constante en el tiempo. Una estrategia de crecimiento inducida por la inversión que no esté acompañada por crecimiento en la PTF u otros factores de crecimiento, va a resultar en un rápido incremento de K/Y, llevando a un *incremento* en el ICOR. Esto hace que la inversión futura sea menos efectiva para impulsar el crecimiento económico. El nivel de crecimiento y la tasa de crecimiento de K/Y también dependen de los términos del intercepto.

Por favor, note que la inversa del ICOR marginal es sólo *el producto marginal del capital (MPK)*:

$$MPK \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = (1-\beta)\frac{Y_t}{K_t} = \frac{1}{ICOR_{m,t}}.$$

El retorno neto al capital es $R = MPK - \delta$. En el ejemplo de arriba, si el ICOR marginal es 4.4, entonces, el producto marginal del capital es $4.4^{-1} = 23\%$. Con $\delta = 5\%$ el retorno neto del capital es 23%-5%=18% por año. Si el ICOR marginal aumenta mientras K/Y aumenta durante un programa de crecimiento económico inducido por inversiones es equivalente a decir que el retorno al capital está cayendo.

[9]Como el nombre lo sugiere, el ratio de capital sobre el producto incremental originalmente se refería a inversión neta: $\dfrac{\Delta K_t}{\Delta Y_t} = \dfrac{I^{Net}_t/Y_{t-1}}{\Delta Y_t/Y_{t-1}} = \dfrac{(I_t - \delta K_{t-1})/Y_t}{\Delta Y/Y_t}$. Sin embargo, en la práctica la inversión neta era dificil de medir en países en desarrollo por la falta de datos sobre las tasas de depreciación y los stocks de capital. Como resultado, muchos analistas aproximan la inversión neta con la inversión bruta, usando la regla de medición presentada en la Ecuación 16. Nótese que la regla para el ICOR bruto no es la misma que para el ICOR neto: el ICOR neto va a ser más pequeño por $\dfrac{\delta K_{t-1}/Y_t}{\Delta Y/Y_t}$, lo cual podría ser importante si las tasas de crecimiento son bajas. Por ejemplo, con $K/Y = 2$ y $\delta = 0.05$, ICOR neto es mas bajo por 5 si el crecimineto del PBI es 2%, pero sólo por 2 si el crecimiento del PBI es 5%.

[10]Eso es, el ICOR *marginal* y el ICOR *promedio* será diferente. El ICOR promedio va a cambiar con la tasa de inversión.

5 Extensión de Pobreza: el efecto del crecimiento económico en la tasa de pobreza

La tasa de pobreza está determinada por la *distribución* de ingreso per cápita, así como por su nivel promedio. La versión 4 del LTGM presenta la distribución del ingreso al asumir que el logaritmo natural del ingreso per capita tiene una distribución normal, $ln(y^{pc}) \sim N(\mu, \sigma^2)$.[11] La distribución log-normal de la distribución del ingreso simplifica de gran manera el cálculo de las tasas de pobreza, la cual necesita muy pocos parámetros, pocos datos y empíricamente es una buena aproximación de la mayoría de la distribución de ingreso (vea López y Servén 2006 & Bourguignon 2007). La implementación de la extensión de la pobreza no afecta de forma substancial la forma en como operan los modelos 1, 2 y 3 mencionados con anterioridad.

La tasa de pobreza P es el porcentaje de gente con ingresos debajo de la línea de pobreza L.Si la combinamos con el promedio μ y la desviación estándar σde la distribución normal *subyacente* (no confundir con el promedio/DS si no la distribución de ingreso real), la tasa de pobreza puede ser calculada de la función de densidad estándar acumulada (FDA) como en la Ecuación 19.[12]

$$P_t = \Phi(\frac{lnL - \mu_t}{\sigma_t}) \tag{19}$$

Para una distribución log normal, el coeficiente de Gini de la desigualdad del ingreso G, es una transformación de desviación estándarσ de la distribución normal *subyacente*:

$$G_t = 2\Phi(\frac{\sigma_t}{\sqrt{2}}) - 1 \tag{20}$$

Para calcular μ de los datos P y L invierta la Ecuación 19:

$$\mu_t = lnL - \sigma_t \Phi^{-1}(P_t) \tag{21}$$

donde σ puede ser calculado de G al invertir la Ecuación y 20:

$$\sigma_t = \sqrt{2} \times \Phi^{-1}(\frac{G_t + 1}{2}) \tag{22}$$

El ingreso medio (PBI per cápita) está dado por $exp(\mu + \sigma^2/2)$. Sin cambios en la desigualdad del ingreso (ej. con G y σ constantes), el crecimiento económico mueve toda la distribución del ingreso hacia la derecha (de forma proporcional) al incrementar μ. Si permitimos cambios en la desigualdad, el crecimiento per cápita está dado por la Ecuación 23:

$$\begin{aligned} 1 + g^{pc}_{y,t+1} &= \bar{y}^{pc}_{t+1}/\bar{y}^{pc}_t = \frac{exp(\mu_{t+1} + \sigma^2_{t+1}/2)}{exp(\mu_t + \sigma^2_t/2)} \\ &= exp(\mu_{t+1} - \mu_t + \frac{1}{2}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2_t)) \end{aligned} \tag{23}$$

Podemos reescribir esto como la Ecuación 24, la cual es usada para actualizar el promedio de la distribución normal subyacente en los Modelos 1 y 3.

$$\mu_{t+1} = ln(1 + g^{pc}_{y,t+1}) + \mu_t - \frac{1}{2}(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2_t) \tag{24}$$

Usando la aproximación $ln(1+g) \approx g$ (para una g pequeña), esto se convierte en: $\mu_{t+1} \approx g^{pc}_{y,t+1} + \mu_t - 1/2(\sigma^2_{t+1} - \sigma^2_t)$ lo cual sugiere que una desigualdad de ingreso constante ($\sigma^2_{t+1} = \sigma^2_t$), un punto porcentual extra de crecimiento de PBI per cápita incrementa μ por un punto porcentual.

[11] Le agrademos a Aart Kraay por sugerir esta metodología. Si bien la distribución del ingreso siempre es log normal, μ y σ varían de país a país y a través del tiempo.

[12] La FDA (proporción menos que x) es $Pr(X \leq x) = \Phi(x)$, la cual es *normsdist(x)* en Excel. La función inversa $\Phi^{-1}(Pr)$, is *normsinv(Pr)* en Excel.

Pasos para resolver la tasa de pobreza en los Modelos 1, 2 y 3 usando una distribución log-normal

En los modelos 1 y 3, los motores de crecimiento (inversión, ahorro, etc) determine la senda del crecimiento per cápita $\{g^{pc}_{y,t+1}\}$, de la cual calculamos el cambio en la tasa de pobreza. Los pasos son los siguientes:

1. Asuma una senda para el coeficiente de Gini del ingreso $\{G_t\}$ desde el primer periodo hasta el fin de la simulación (esta puede ser constante), y luego calcule σ_t para cada año usado en la Ecuación 22.[13]

2. Escoja un línea de pobreza L y una tasa de pobreza P_t para esa línea de pobreza. Los valores precargados por defecto son la línea de pobreza extrema ($1.90/día 2011 PPP) y datos sobre pobreza extrema más recientes encuestas de los hogares en PovcalNet. De forma alternativa, los usuarios pueden ingresar manualmente $\{P, L\}$ para su propia línea de pobreza (que suele ser diferente) [14] Calcule el $\mu_t$inicial usando la Ecuación 21. [15]

3. Para cada período después del primero, actualice μ_{t+1} usando la Ecuación 24.

4. Para cada período después del primero, calcule la tasa de pobreza P_{t+1}usando la Ecuación 19 (μ_{t+1}, σ_{t+1} y L son dados).[16]

Elasticidad de pobreza-crecimiento (GEP) — entendiendo el efecto del crecimiento sobre la pobreza

En la literatura, la elasticicidad pobreza-crecimiento *(GEP)* ε_p es el porcentaje (no puntos porcentales) de la caída en la tasa de pobreza de un 1% de incremento en el ingreso per cápita. (por ejemplo, de un 1% de tasa de crecimiento per cápita). Para una distribución log normal, la GEP está dada por la Ecuación 25, lo cual ayuda al usuario del LTGM a comparar sus estimados con aquellos de la literatura empírica.[17] Bourguignon (2007) reporta estimados empíricos de 1.5 a través de tiempos cortos de pobreza. Sin embargo, investigaciones anteriores estiman un GEP de 2 y hasta 3.

Sin embargo, la GEP varía substancialmente a través de países y del tiempo. Con una distribución de ingreso log normal, el GEP es mecanicamente más alto para países con bajas tasas de pobreza, porque hasta un pequeño cambio en la tasa de pobreza es grande como porcentaje de una base pequeña. La GEP también es más alta para los países que son más iguales (un coeficiente de Gini del ingreso más pequeño) Como señala Bourguignon (2007) esto significa que una reducción en desigualdad tiene un "doble dividendo": primero, reduce la pobreza en sí misma y, segundo, incrementa la elasticidad crecimiento-pobreza.

$$\varepsilon_{p,t} \equiv -\frac{\partial lnP_t}{\partial ln\bar{y}_t} = -\frac{\partial P_t}{\partial \mu_t}\frac{1}{P_t} = \frac{1}{\sigma}\frac{\phi(\dfrac{lnL-\mu_t}{\sigma_t})}{\Phi(\dfrac{lnL-\mu_t}{\sigma_t})} \tag{25}$$

Una medida relacionada es la *semi-elasticidad crecimiento-pobreza*, que definimos como el cambio en *puntos porcentuales* en pobreza por un 1% extra de incremento en el ingreso per cápita. (por ejemplo, de un 1% de la tasa de crecimiento per cápita) como en la Ecuación 26.

$$\Delta_p \equiv -\frac{\partial P_t}{\partial ln\bar{y}_t} = \varepsilon_{p,t} \times P_t = \frac{1}{\sigma}\phi(\frac{lnL-\mu_t}{\sigma_t}) \tag{26}$$

La semi-elasticidad de crecimiento-pobreza tiene forma de U inversa en la tasa de pobreza, con los cambios más grandes en tasas de pobreza en puntos porcentuales por lo gneerla en países con tasas de pobreza de alrededor de 0.5. En este punto hay muchas personas justo debajo de la línea de pobreza que pueden ser sacadas de la pobreza por un

[13] Esto puede ser hecho en Excel de la siguiente manera: $\sigma_t = sqrt(2) * NORMSINV(0.5 * (G_t + 1))$

[14] Sólo la línea de pobreza inicial P afecta al modelo. Los cambios en L (por ejemplo, si cambiamos de por día a mensual, o el tipo de dinero en el que se mide la pobreza), no afectan el modelo mientras μescale de forma correspondiente.

[15] Esto puede ser hecho en Excel usando $\mu_{i,t} = ln(L_i) - \sigma_{i,t}NORMSINV(P_{i,t})$

[16] Esto puede ser hecho en Excel usando $P_{t+1} = NORMSDIST((ln(L) - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1})$

[17] Un incremento en el ingreso promedio (manteniendo σ constante) siempre reduce la tasa de pobreza, entonces, seguimos a Bourguignon (2007) y hace una elasticidad positiva al pre-multiplicar por -1. La segunda igualdad en la Ecuación 25 viene del promedio de una distribución log-normal $ln\bar{y}_i = \mu_i + \sigma_i^2/2$ (manteniendo σ_i constante) y la tercera igualdad viene de aplicar la regla de Leibniz a la Ecuación 19. La Ecuación es similar a la Ecuación$3'$ en Bourguignon (2007). Aquí $\phi(.)$ es la función de probabilidad de la distribución normal (en Excel $NORMDIST(x, 0, 1, FALSE)$ y la Ecuación 25 es $(1/\sigma_{t+1}) * NORMDIST((ln(L) - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}, 0, 1, FALSE)/NORMSDIST((ln(L) - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1})$.

pequeño incremento en el ingreso. El *crecimiento de la semi-elasticidad de la pobreza* es calculado como un ítem de memorandum en el LTGM.

La implementacion de la GEP en el LTGM. En el LTGM, los usarios pueden ingresar sus propias GEP en vez de usar las implícitas por la distribución log-normal del ingreso (Ecuación 25). Para el modelo 1, Modelo 3 y Modelo 2 (sin metas de reducción de la pobreza), la tasa de pobreza está dada por:

$$P_{t+1} = (1 - \varepsilon_{p,t+1} \times g^{pc}_{y,t+1})P_t \tag{27}$$

De manera alternativa, en el Modelo 2 (con una meta de pobreza) el crecimiento requerido es dado por:

$$g^{pc}_{y,t+1} = -(P_{t+1}/P_t - 1)/\varepsilon_{p,t+1} \tag{28}$$

Premium de la Prosperidad Compartida (SPP)

Uno de los objetivos del Banco Mundial es "promover la prosperidad compatida al fomentar el crecimiento de los ingresos de los 40% m;as pobre de la población en todos los países."

En la extensión de pobreza del LTGM, el promedio de ingreso de los 40% más pobres de la población está dado por la Ecuación 29, donde $k_t \equiv exp(\sigma_t \Phi^{-1}(0.4) + \mu_t)$ es la línea de ingreso que define a los 40% más pobres (el cual cambia a través del tiempo y de países).[18]

$$E(y^{pc}|y^{pc} < k_t) = 0.4^{-1} e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sigma_t) \tag{29}$$

La porción del ingreso de los 40% más pobre de la población ($SB40$) puede ser expresado como [19]

$$\begin{aligned} SB40_t &\equiv \frac{E(y^{pc}|y^{pc} < k_t) \times 0.4}{\bar{y}^{pc}_t} \\ &= \frac{0.4^{-1} e^{\mu_t + \sigma_t^2/2} \Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sigma_t) \times 0.4}{e^{\mu_t + \sigma_t^2/2}} \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sigma_t) \end{aligned} \tag{30}$$

En términos del coeficiente de Gini (usando la Ecuación 22) la porción del ingreso del 40% más pobre puede ser escrita como:

$$SB40_t = \Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sqrt{2} \times \Phi^{-1}((G_t + 1)/2)) \tag{31}$$

Como tal, el crecimiento del promedio de los 40% más pobres está definido como el crecimiento bruto promedio de ingreso $1 + g^{pc}_{\bar{y},t+1}$por el crecimiento bruto del 40% más pobre de la población ($SB40_{t+1}/SB40_t$)

$$\begin{aligned} 1 + g_{\bar{40},t+1} &\equiv \frac{E(y^{pc}_{t+1}|y^{pc}_{t+1} < k_{t+1})}{E(y^{pc}_t|y^{pc}_t < k_t)} \\ &= (1 + g^{pc}_{\bar{y},t+1}) \frac{\Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sigma_{t+1})}{\Phi(\Phi^{-1}(0.4) - \sigma_t)} \\ &= (1 + g^{pc}_{\bar{y},t+1}) \frac{SB40_{t+1}}{SB40_t} \end{aligned} \tag{32}$$

donde $g^{pc}_{\bar{y},t+1}$ es el crecimiento per cápita de toda la economía definido como en la Ecuación 23 y σes la desviación estándar de la distribución normal subyacente (la cual es una transformación de uno a uno del coeficiente de Gini por la Ecuación 20).

El Premium de la *Prosperidad Compartida (SPP)* (Equation 33) es el exceso del crecimiento del ingreso de los 40% más pobre ($g_{\bar{40},t+1}$) sobre el promedio de crecimiento per cápita de toda la economía ($g^{pc}_{\bar{y},t+1}$):

$$SPP_{t+1} \equiv ln(1 + g_{\bar{40},t+1}) - ln(1 + g^{pc}_{y,t+1}) \approx g_{\bar{40},t+1} - g^{pc}_{\bar{y},t+1} \tag{33}$$

Al combinar las Ecuaciones 33 y 32, se puede ver una ganancia en la expresión SPP_{t+1}, la cual es sólo el crecimiento (en logaritmos) del ingreso de los 40% más pobre.

[18] Esto sigue de la expresión para un promedio condicional de la distribución log normal: $E(X|X < k_t) = e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\frac{ln(k_t) - \mu_t - \sigma_t^2}{\sigma_t}) / \Phi(\frac{ln(k_t) - \mu_t}{\sigma_t})$, donde $\Phi(\frac{ln(k_t) - \mu_t}{\sigma_t}) = 0.4$

[19] Para ver esto, normalizamos la población a 1, lo cual significa que el promedio del ingreso per cápita $\bar{y}^{pc}$es igual al ingreso total.

$$SPP_{t+1} = ln\left[\frac{\Phi(\Phi^{-1}(0.4)-\sigma_{t+1})}{\Phi(\Phi^{-1}(0.4)-\sigma_t)}\right] \tag{34}$$

$$= ln\left[\frac{SB40_{t+1}}{SB40_t}\right] \tag{35}$$

De la Ecuación 34 se puede ver que cuando no hay cambios en la desigualdad del ingreso (tal que $\sigma_{t+1} = \sigma_t$ y $G_{t+1} = G_t$), entonces el premium de la prosperidad compartida va a ser cero y la tasa de crecimiento del ingreso de los 40% más pobres va a ser la misma que la tasa de crecimiento per cápita de toda la economía (recuerde la Ecuación 22 que $\sigma_t = \sqrt{2}\times\Phi^{-1}([G_t+1]/2)$). Como tal, si el ingreso sigue la distribución log-normal, entonces hay casi una relación de uno a uno entre los cambios en la desigualdad (medida por el coficiente de Gini) y el premium de la prosperidad compartida: una caída(subida) en desigualdad es equivalente a un premium de la prosperidad compartida positiva (negativa).

Implementación de la Prosperidad Compartda en el LTGM

Dada la Ecuación 34, el Premium de la Prosperidad Compartida entra el LTGM de manera altenativa ya que el usuario especifica una senda de desigualdad, o resume las implicancias del 40% de los más pobres para una senda dada de coeficiente de Gini. Como tal, la prosperidad compartida entra más que todo en la pestaña InputDataA cuando el usuario especifica que la senda de la desigualdad (y la SPP es graficada en la pestaña GraphsA).[20]

- Si el usuario especifica una senda para el coeficiente de Gini, el; Premium de la Prosperidad compartida implícita es calculado usando la Ecuación 34 como un residuo (usando la Ecuación 22 para substituir el Gini como un paso intermedio).
- Si el usuario especifica una senda para el Premium de la Prosperidad Compartida (SPP):
  - el usuario debe especificar un coeficiente de Gini inicial $G_t$para el primer año, que luego es convertido en una σ_t inicial usando la Ecuación 22.
  - σ_{t+1} dato por la Ecuación 36, donde un *SPP más alto* increce reduce σ_{t+1}

$$\sigma_{t+1} = \Phi^{-1}(0.4) - \Phi^{-1}\left[e^{SPP_{t+1}}\Phi(\Phi^{-1}(0.4)-\sigma_t)\right] \tag{36}$$

  - el coeficiente de Gini G_{t+1} (en cual entra los modelos) es calculado usando la Ecuación 20.
- El porcentaje del ingreso que corresponde a los 40% más pobre de la población ($SB40$) es listado como un ítem de memorandum usando la Ecuación 30.

References

[1] Bourguignon, F., 2007, “The Growth Elasticity of Poverty Reduction: Explaining Heterogeneity across Countries and Time Periods” in Eicher and Turnovsky (eds.) *Inequality and Growth: Theory and Policy Implications* MIT Press

[2] Hevia C. and N. Loayza, 2012, “Savings and Growth in Egypt” *Middle East Development Journal* 4, 1

[3] Inklaar R. and M. Timmer, 2013, “Capital, labor and TFP in PWT8.0” (July 2013) [link]

[4] Lopez H. and L. Serven, 2006, “A Normal Relationship? Poverty, Growth, and Inequality” World Bank Policy Research Working Paper 3814, January 2006

[5] Solow, R. 1956, “A Contribution to the Theory of Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, 70:65-94.

[6] Swan, T. 1956, “Economic Growth and Capital Accumulation”, *Economic Record*, 32:334-361.

[20] La tasa de crecimiento del ingreso de los 40% más pobres en cada pestaña Model 1/1s/2/2s/3/3s es resumida como un ítem de memoradum de pobreza al final de cada una de estas pestañas y graficada en GraphsBs.